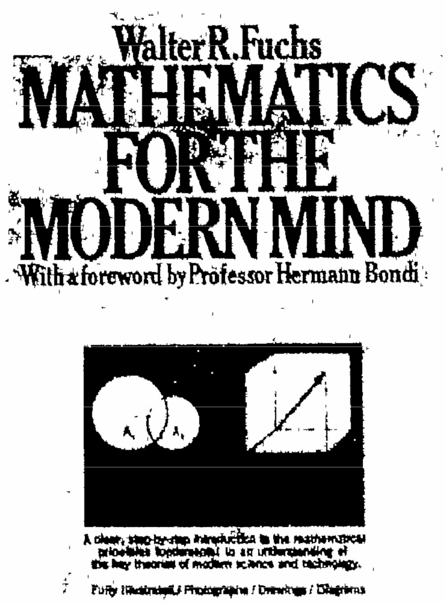


رياضيات العقل الحديث

تاليف دكتور والترفوخس *

عرض وتحليل : دكتور سعد كامل مسعود

ان كل انسان فى هذا العصر ، مطالب ببذل اكبر قدر من الجهد لتقديم العلوم الحديثة ، فقد أصبحت نتائج هذه العلوم جزءا من حياتنا اليومية . واذا اردنا أن نستعين بالكتب ذات التخصص الدقيق ، فى موضوع ما ، فان عزيمتنا وتركيزنا على القراءة سيضعفان بعد الصفحات الأولى منه ، ونجد انفسنا فى متاهة فى الصفحات التالية ، وذلك لأن من الصعوبة بمكان الانتقال فجاة من أمور متناهية فى البساطة الى أشياء متقدمة .

وعلى ذلك فانه بالنسبة للرياضيات المعاصرة نجد الحاجة ماسة الى كتاب يعين على فهمها ، فالرياضيات من العلوم التي نقابلها كل ساعة من حياتنا ، وكما قال العالم الرياضى لايبنتس Leibnitz « ان كل شيء فى هذا العالم المتسع يحدث رياضيا »

واذا نظرنا فى الوقت الحالي الى خريجي المدارس ، فاننا نجد ان ما يعرفونه من الرياضيات لايزيد كثيرا عما كان يعرفه اقرانهم منذ ما يزيد عن مائتين وخمسين عاما . صحيح انهم يعرفون حل معادلات الدرجة الثانية ، ويعلمون بعض الشيء عن الأعداد الحقيقية والمركبة ، ومبادىء التفاضل والتكامل . ولكن قليلا جدا منهم من يعرف الحقائق الأساسية للعقول الحاسبة الالكترونية أو نظرية المجموعات (Set Theory) .

* Fuchs, W.R.; Mathematics for the Modern Mind, Macmillan, N,y., 1967

ومـن الطبيعي أن جهـل الغالبية العظمى بالرياضيات يصحبه عدم تفهمها وسوء تقديرها ، فالبعض يظن أنها عمليات مملـة بالأرقـام ، والبعض يعتقد أنها أبراج عاجية لايدخلها الا القلائل ذوو المواهب وكـلا الاعتقادين غـير صحيح .

وقد يتسائل البعض عما نعنيه عندما نتكلم عن الرياضيات المعاصرة ، ونرد على ذلك بأنه ، فى الواقع ، معالجة ما بحثـه الرياضيـون فى القرنين الثامن عشر والتاسع عشر من مواضيع من وجهة نظر حديثة ، وهذه النظرة تختلف تماما عن وجهة نظر قدماء المصريين واليونان . وقد بدات هـذه الدراسـة فى العشرينيـات والثلاثينيات من القرن الماضي ، عندما نشأت الهندسة اللااقليدية . ويمكننا ان نعتبـر ان البراهين هي خيوط تربط العبارات فى النظريات الرياضية الى شبكة غير مطروقة من قبـل ، وهذه الشبكة المتشعبة تتكون بالاستنتاجات المنطقية وهي ما تعـرف بالمنطـق الرياضي (Mathematical Logic) . وقد تبدو بعض العبارات فى المنطق الرياضي تافهة ، ولكن من الخطأ أن نخلط بين الشفافية والتفاهة ، وذلك لأن اى علم يجب أن يبدأ من حقائق اساسية فى منتهى البساطـة . والرياضيـون يصرون دائما على انه يجب اثبات اكثر الأمور بطريقة عامة قبل أن يعتمدوا عليها .

ومؤلف هذا الكتاب هو الدكتور والترفوخس المولود فى بونستون بولاية نيوجرسي فى عـام ١٩٣٧ ، وقد حصل على درجـة الدكتوراة (P.H.D.) مـن جامعـة ميونخ . وهـو المسئول عن البرامج الدراسية العلمية لشبكة التلفزيون البافارى ، وقد الف كتابا آخر هو الفيزياء للفكر المعاصر ، ويعد هذا الكتاب من أنجح المحاولات فى الأعوام الاخيرة لتفهم الفيزياء المعاصرة .

ويقع كتاب الرياضيات للفكـر المعاصر فى ٢٨٦ صفحة ، ويحتوى على اثنى عشر فصلا وملحقين . وبالكتاب اكثر من ٢٠٠ رسـم توضيحي معظمها بالالوان ، بالاضافة الى صور فوتوغرافية كثيرة لعلماء رياضيـين . وقـد كتب مقدمة الكتاب الاستاذ هيرمان بونـدى Prof. H. Bondi وهو زميـل بالجمعيـة الملكية فى بريطانيا ، والذى عين فى عام ١٩٦٤ رئيسا للجنة أبحاث الفضـاء فى بريطانيـا . والكتاب مترجم من الألمانية ، وقد قام بترجمته الدكتـور هولشـتين Dr. H. A, Holstein الرياضي بجامعة ثوثهامبتون بانجلترا .

وسنعرض فيما يلي لما جـاء فى فصول الكتاب .

الفصل الأول .

ان اللغة العادية فقيرة ومبهمة لكي تعبر عن العلاقات الدقيقة والمليئة بالمعـاني فى العلـوم الرياضية ،والرياضيون يهتمون بالدرجة الأولى بالصورة (Form) التي تكون عليها هـذه العلاقة كما تهتم الرياضيات المعاصرة بالتكوين (Structure) لأن ما يستخدم فيه يصلح كقاعدة نستطيع البناء عليها .

وقد وضع اقليدس تعريفا للنقطة والخـط المستقيم ، وقـد حاول الرياضيـون لقرون طويلة دون نجاح كامل ترجمة هذه التعاريف ، بحيث تكون أكثر دقة وشمولا ، وقد حـدد العالم الرياضي باسكـال (Pascal) قواعـد للتعريف فى الرياضيات هي .

١ ـ لا تعرف أى شيء يكون واضحا مـن نفسـه .

٢ ـ لا تترك اى شيء غامض غير معرف .

٣ ـ استخدم فى التعريف الفاظا اما معروفة أو شرحت من قبل .

وقبـل هيلبـرت (Hilbert) كـانت الفرضيـات (axioms) فى هندسـة اقليدس تعتبر حقائق لاتحتاج الى برهـان ،

ولكن بالنسبة لهيلبرت كانت الفرضيات تعنى جملا صورية (sentence forms) تتحول بعد ترجمة المتغيرات فيها الى جمل ذات اثر ؛ كما ان هذه الجمل الصورية ليست صادقة او كاذبة وانما هي قابلة للتحقيق أو غير قابلة .

وفى المنطق الرياضي توجد متغيرات تحتاج لكي تصبح ذات مغزى الى جملة كاملة ، وهذه الجمل تتميز بأنها صادقة أو غير صادقة ، والمعاني المختلفة التي يمكن أن تأخذها تسمى قيمة المتغير ، واستخدام العلامات الاختيارية فى المنطق الرياضي ذو اهمية قصوى . ولضمان استخدامها بطريقة معقولة يجب أن توضع قواعد واضحة ، وبدون هذه القواعد لا يمكن القيام بحسابات بهذه الجمل . والمنطق الرياضي يمكننا من أن نرى ما وراء التفكير الصورى للرياضيين والمنطقيين ، فان اهتمامهم مركز على الطريقة التي ترتبط بها العبارات وليس على محتوى هذه العبارات . والفرضيات والجمل الاخرى لأى نظرية تتصل ، بعضها ببعض ، ببراهين لتكون سلسلة من الاستجابات المنطقية ، وتستخدم لهذا الفرض رموز للدلالة على كلمة « اذن » وكلمة « أو » ولحرفى النفى والعطف .

الفصل الثاني :

لقد عالج هيلبرت الفرضيات على انها عبارات صورية (Statement forms) موضوعة فى صفوف وبينها علامات طبقا لقاعدة معينة ، ولكن علينا أن نميز بوضوح بين الفرضيات والقواعد وبين العبارات الصورية والتعليمات الخاصة باستعمالها ، كما ان من الشروط الأساسية التي يجب توافرها فى الصيغ الدقيقة للفرضيات أن تكون خالية من التناقضات .

والمفاهيم الأساسية للفرضيات ذات المحتوى المادى تبنى على اساس الحقائق البسيطة الواضحة ، أو كنتيجة للتجربة وبذلك تدفع الى الاعتقاد بوجود بعض قوانين الطبيعة والميل الى تأييد هذا الاعتقاد بنجاح النظرية .

ومن ذلك نرى أن التكوين الفرضي للرياضيات ذو أهمية حاسمة فى الصياغة الرياضية ومن الممكن أن نبنى حسابا (calculus) باستخدام أشياء مادية ، مثل عيدان الثقاب ، أو دبابيس الورق ، مع اتباع تعاليم معينة . وهذه العملية تشبه عملية بناء حائط حيث توضع القوالب بعضها فوق بعض وفقا لنظام معين ، كما يمكن تشبيهها بعملية النسيج اليدوى .

وهناك شرطان لعملية البناء :

١ ــ ان نبدا بتثبيت شكل مبدئي وليكن دبوسا أو عود ثقاب وهذا يشبه الغرزة الأولى فى النسيج اليدوى .

٢ ــ أن نضع وصفا لتكوين الأشكال وفقا لقاعدة أو قاعدتين للعمل تماما كما نصنع فى النسيج اليدوى ، اذ أن تكوين الفرز يسير وفقا لنظام معين وليس عشوائيا .

ونحن عندما نتعلم كيف يمكن استنتاج الأشكال ، باتباع حساب معين ، فانما يعنى ذلك أننا تعلمنا كيف نجرى العمليات ، وهذا لايعتمد على وصفنا لهذه الاشكال ، وهو يشبه الى حد كبير كيف أن الطفل يتعلم المشي قبل ان يكون قادرا على الكلام عن المشي . كما أننا نستطيع ان نقرر ما اذا كان بالامكان استنتاج أحد الأشكال ام لا ، وفقا للقواعد المتاحة لنا .

ولكن هناك نقطة وهي : ماذا يمكن أن يقال عن صدق صيغة رياضية تتعلق بالأعداد ؟ وكمثال على ذلك كلنا نعلم ماهي الأعداد الزوجيةأى الاعداد (٢ ، ٤ ، ٦ ، . . .)وكذلك الأعداد الأوليةوهي الاعداد التي لاتقبل القسمة الا على الواحد أو نفسها للحصول على عدد صحيح ، وهذه الاعداد هي (٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، . . . .) .

هناك علاقةبين الأعداد الأولية تقول ، ان اى عدد زوجي أكبر من أو يساوى ٢ يمكن كتابته كحاصل جمع عددين أوليـين . مثـال ذلك ٤=٣+١ ، ٦=٥+١ ، ٨=٣+٥ ، ١٨ = ١٣+٥ . . . وهكذا. هذه العلاقة صحيحة ولم يحدث حتى الآن أن وجد عدد زوجي يخالف هذه العلاقة ، ولكن هذه الطريقة لاتصلح لبرهـان العلاقة لأننا لا نستطيع مواصلة تحقيقها على جميع الاعداد الزوجيـة نظرا لوجـود عـدد لانهائي منها . وعلى ذلك فهذه العلاقة غـير صحيحة من وجهة نظر المنطق الرياضي ، كما اننا لانستطيع حتى الآن أن نذكر عددا زوجيا يخالف هذه العلاقة . وحتى الآن لا يعـرف الرياضيون طريقة تمكنهم من تقرير ما اذا كانت هذه العلاقة صحيحة أم لا .

الفصل الثالث :

تلعب الأعداد دورا كبيرا فى الرياضيات ،وقد بدأ تطور الأعداد منذ فجر التاريخ ، وقـد استخدم الانسان رموزا للدلالـة عليها منـذ العصر الحجرى . ومنذ ٤٠٠٠ سنة قبل الميلاد طور المصريون القدماء هذه الرموز بما يسمح لهم بالعد ، واستخدم اليونانيون القدمـاء الأشكال الهندسية كوسيلة للعد .

وتنبني نظرية الأعداد الطبيعية على اساس تتابع حسابي ، فالعدد التالي لأى عدد طبيعي أ ينتج باضافة واحد له ، أى انه أ+١ . واذا كان لدينا عددان طبيعيان أ،ب فان مفهـوم التساوى أ=ب يعني أنه يمكن احلال ب محل أ وبالعكس . وعند اضافة عددين طبيعيين أ،ب فان ذلك يكتب أ+ب ويسمى حاصل جمـع العددين ، ويمكن اثبات أن العملية أ+ب تنتج عددا طبيعيا واحدا . وبالنسبة لحاصل ضرب عددين طبيعيين أ،ب فاننا نبدأ أولا بتعريف بسيط ، وهـو أن قيمـة اى عـدد صحيـح أ لا تتغير اذا ضربت فى واحد ، وبعد ذلك يمكن اثبات قانون التبادل فى الجمع والضرب ، ونعنى بذلك أن أ+ب=ب+أ وأن أ.ب=ب.أ .

ويعتمد الاثبـات على طريقـة الاسـتنتاج الرياضي . وتتلخص هذه الطريقة فى اثبـات انه اذا كانت القاعدة صحيحة للعدد ن فانـه يمكن استنتاج صحتها للعدد (ن+١) ، وعلى ذلك اذا كانت القاعدة صحيحة للعدد ١ فهي صحيحة للعدد ٢ ثم للعدد ٣ وهكذا .

الفصل الرابـع :

يعد الاستنتاج الرياضي من اهم وسـائل البرهان فى الحساب ، ولكنه ممكن فقط اذا كانت العملية يمكن تكرارها عددا لانهائيا مـن المرات . وقد شغل موضوع اللانهاية عقـل الانسان اكثر من اى موضوع آخر ، وعندما طبق باسكال الأمر على الأعداد الطبيعية قال : « مهما كان العدد كبيرا فيمكن دائما تخيـل عدد اكبر منه ، وهكذا دون ان نحصل على عدد لا يمكن الحصول على ما هو أكبر منه » .

وهناك صعوبات تنشأ عند دراسة اللانهاية، فمن الممكن أن نحصل على نتائج مستحيلة . لقد سبق لنا أن عرفنا عمليتى الجمع والضرب للاعداد الطبيعية والآن نعرف عملية الطرح على النحو الآتي : اذا كان جـ ـ ب = أ فهذا يعني أن جـ=أ+ب ، والعدد (جـ ـب) يسـمى الفرق . كذلك هناك الصفر وأبسط طريقـة لتعريفه هي : يوجد عدد هو الصفر . بحيث أن لكل عدد أ تحقق العلاقة أ+صفـر =أ ، صفر +أ=أ .

اذا اخذنا المتسلسلة : أ ـ أ + أ ـ أ + أ ـ أ + . . . الـخ

فيمكن كتابة هذه المتسلسلة كحاصل جمـع لانهائي لفروق بسيطة على الصورة .

(أ ـ أ) + (أ ـ أ) + (أ ـ أ) + . . .

ولكن من تعريف الصفر نجد أن أ ـ أ= صفر وعلى ذلك فهذه المتسلسلة عبارة عن صفر + صفر + . . . = صفر .

ولكن من ناحية أخرى يمكن كتابة المتسلسلة على الصورة الآتية :

أ ــ (أ ــ أ) ــ (أ ــ أ) ــ . . .

وواضح أن هناك تناقضا بين النتيجتين فان معنى هذا هو ان أ = صفر اى ان ١ = صفر ، ٢ = صفر .. وهكذا

وهذا التناقض يوضح أن العمليات الحسابية التي تؤدى على عدد محدود من الأرقام لا يمكن تطبيقها ببساطة على المتسلسلات اللانهائية ــ

بعد ذلك نتكلم عن نظرية كانتور (G. Cantor) للمجموعات . وتعرف المجموعة (set) بانها تجمع لأشياء متعددة فى شيء واحد . فمثلا سكان مدينة أو مجموعة ذرات الهيدروجين فى الشمس وهكذا . وهناك مجموعة محدودة (finite) ومجموعة لانهائية (infinite) وتسمى مكونات المجموعة عناصر . وليس من الضرورى أن تكون عناصر المجموعة متجانسة ، كما ان ترتيب هذه العناصر لا أهمية له . وتوجد أيضا مجموعة لا تحتوى على اى عنصر ، وتسمى المجموعة الخالية . وتعرف المجموعة الجزئية (subset) بانها مجموعة كل عناصرها جزء من عناصر مجموعة اخرى .

وقد عرف كانتور لكل مجموعة رقما اساسيا (Cardinal number) يدل على عدد عناصر المجموعة اذا كانت محدودة . ويقال ان مجموعتين (أ) ، (ب) متكافئتين اذا كان هناك تناظر واحد لواحد بين عناصر كل من (أ) ، (ب) . واذا كانت المجموعات لانهائية فان المجموعتين (أ) ، (ب) تكونان متكافئتين ، اذا كان هناك تناظر ، واحد لواحد .

واذا اخذ مجموعة الأعداد الطبيعية (أ) = (١،٢،٣،٤ . . . .)

ومجموعة الأعداد الزوجية (ب) = ٢،٤،٦،٨ . . . .

فاننا نجد ان (أ) ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

↑↓ ↑↓ ↑↓

(ب) ٢ ٤ ٦

اى انه ليس هناك تناظر واحد لواحد بين عناصرها ، ولكن اذا أعدنا تفكيرنا على النحو الآتي :

(أ) ١ ٢ ٣ ٤ ٥ . . . ن

(ب) ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ . . . ٢ن

نجد أن هناك تناظرا واحدا لواحد ، وعلى ذلك فالمجموعتان (أ) ، (ب) متكافئتان . وهناك أمثلة كثيرة على ذلك ، ويمكننا القول أن كل مجموعة جزئية لا نهائية من المجموعة اللانهائية (أ) تكافىء المجموعة (أ) .

ومن هذا يتضح أن فرضية اقليدس « الكل اكبر من الجزء » غير صحيحة عندما نتعرض للانهاية .

الفصل الخامس :

يرى الفيلسوف الرياضي ديكارت (Descartes) أن هناك واقعية فى المادة اللانهائية عنها فى المحدودة ، ويقول ديكارت « ان مفهوم اللانهاية مقدم على مفهوم المحدود ، وعلى ذلك فان مفهوم الاله سبحانه وتعالى مقدم على مفهوم نفسي . انني أشك واشعر بنقص اى انني لست كاملا ، واذن لا بد من موجود كامل ، والا فكيف يتسنى لي أن الاحظ مابي من نقص الا اذا قارنت نفسي به » .

والأعداد الطبيعية تكون متتابعة لانهائية من جهة واحدة ، وتوجد أعداد طبيعية سالبة أى ــ ١ ، ــ ٢ ، ــ ٣ ، . . . وتختلف عن الأعداد الطبيعية بوجود اشارة الناقص (ــ) وهي

تكون مع الأعداد الطبيعية ما يسمى بالأعداد الصحيحة(intetgus) وهي متتابعة لانهائية من جهتيها ، اى انه ليس لها حد أول او حد اخير .

ومن اهم العلاقات بين الأعداد السالبة أن حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب فمثلا (ـ أ) . (ـ ب)= أ ب ـ٥ × ـ٤ = ٢٠

واذا انتقلنا الى الكلام عن القسمة فاننا نتعرف على الأعداد النسبية (rational numbers) وهي الأعداد فى صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ،ب عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك ، ب لا تساوى صفرا . بين اى عددين صحيحين متتاليين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية . توجد ايضا أعداد اخرى بين الأعداد النسبية لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ وتسمى هذه الأعداد بالأعداد غير النسبية (irrational) مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ والنسبة التقريبية ط . والأعداد النسبية وغير النسبية يمكن دائما كتابتها على صورة كسر عشرى . وهذه كلها تكون مجموعة الأعداد الحقيقية . والرقم الأساسي لهذه المجموعةاكبر من الرقم الأساسي لمجموعةالأعداد الطبيعية .

الفصل السادس :

عندما نتكلم عن النهايات فبدلا من أن نقول ان ن تؤول الى مالا نهاية فاننا يجب ان نقول ان العدد ن يزداد بدون حد ، وكما قال العالم الرياضي الفرنسي جاوس (Gauss) فانه من غير المسموح به فى الرياضياتاستخدام اللانهاية كشيء يمكن الوصول اليه .

وقد كان مقدرا لنظرية كانتور للمجموعات أن تفشل عندما امتد بها الى آفاق اوسع ، فاننا اذا تكلمنا عن « مجموعة كل المجموعات » (set of all sets) فهي مجموعة فى مفهوم كانتور ذات خواص محدودة . وقد اظهر الفيلسوف الانجليزى برتراند رسل Bertrand Russel ان مفهوم هذه المجموعة يؤدى الى تناقضات ، وهناك مثل طريف يوضح هذا التناقض . من المعتاد ان يذهب القرويون الى حلاق القرية لحلاقة ذقونهم ، فاذا عرفنا حلاق القرية بأنه الرجل الذى يحلق ذقون جميع الرجال الذين لا يحلقون ذقونهم بأيديهم ، فاننا بهذا التعريف نضع حلاق القرية فى مركز حرج ، فهو اذا حلق ذقنه بنفسه فانه ليس واحدا من الرجال الذين لا يحلقون بأيديهم ، وهؤلاء هم فقط الذين يسمح له بحلاقة ذقونهم ، وبذلك فغير مسموح له بحلاقة ذقنه . أما اذا لم يحلق ذقنه بنفسه فانه واحد من الرجال الذين لا يحلقون بأيديهم ، اى انه واحد من الرجال الذين يجب عليهم حلاقة ذقنهم . وهذه القصة بالطبع خيالية ، وقد أنكر كثير من الرياضيين وجود مثل هذه المجموعة . وقد ادخل رسل فيما بعد شروطا على تكوين المجموعات كانت ذات فائدة كبيرة فى تقدم نظرية المجموعات .

الفصل السابع :

لا يوجد عدد حقيقي تحت اى ظرف من الظروف بحيث اذا ضرب فى نفسه يعطي عددا سالبا ، وعلى ذلك فان هناك حاجة الى نوع جديد من الرياضيات تسمى الأعداد المركبة (complex numbers) عندما نتساءل عن ما هو الجذر التربيعي لعدد اختيارى سالب . وابسط هذه الأعداد هو ـ ١ . وتعرف الكمية التخيلية ت = $\sqrt{-١}$ بأن ت.ت = ـ ١ . وهذه الأعداد المركبة لا يمكن مقارنتها بالأعداد الحقيقية . ويمثل العدد المركب بزوج من الأعداد الحقيقية مثل (أ ، ب) . والعدد التخيلي ت يكتب فى الصورة (صفر ، ١) ويكتب العدد المركب (أ ، ب) عادة فى الصورة (أ+ت ب) .

وتخضع الأعداد المركبة للقواعد التاليـة :
١ ـ اذا كان (أ ، ب) = (جـ ، د) فان أ = جـ ، ب = د .

٢ ـ (أ ، ب) ± (جـ ، د) = (أ ± جـ ، ب ± د) .

٣ ـ (أ ، ب) × (جـ ، د) = (أ جـ ـ ب د ، أ د + ب جـ)

وقد الف ابو بكر الخوارزمي فى القـــرن التاسع الميلادى كتابا عنوانه « الجبر والمقابلة » وعالج فيه مسائل الوراثة والقسمة والمعاملات القانونية فى التجارة ، ومنذ ذلك التاريخ نشأ اسم الجبر المستخدم فى الرياضيات الحديثة .

وقد قام فريق من العلماء تحت اســـم «بورباكى» بوضع مؤلف عن مبادىء الرياضيات فى نحو ثلاثين جزءا ، وكان الفرض منه تحويل الرياضيات الى جبر .

وهناك بعض مبادىء جبر المجموعات ، ومن اهمها اتحاد مجموعتـين وتقاطعهمـا . واذا اعتبرنا ثلاث مجموعات كعناصر من نظام جديد فانها تكون ما يعرف باسم الشبكة (Lattice) وتوجد كذلك نظرية الزُمر (Theory of Groups) ويمكن تعريف الزمرة على النحو التالي : اذا كان س$_{١}$ ، س$_{٢}$ عنصرين من زمرة فان حاصل الضرب س$_{١}$. س$_{٢}$ عنصر ايضا مـن عناصر الزمرة . كما أن العلاقة بين عناصر الزمرة تحقق القانون (س$_{١}$. س$_{٢}$) . س$_{٣}$ = س$_{١}$. (س$_{٢}$. س$_{٣}$) .

ويعرف عنصر الوحدة هـ على انه لكل عنصر س$_{ن}$ تتحقق العلاقة .

(س$_{ن}$. هـ) = (هـ . س$_{ن}$) = س$_{ن}$.

الفصل الثامن :

لقد نشأ حساب الاحتمـالات فى القـرن السابع عشر عندما تقدم احد النبلاء الذيـن كانوا يقطعون الوقت فى لعب القمـار ، الى صديقه العالم باسكال سائلا اياه عن احتمالات الفوز ، خصوصا فى لعبة النرد ، وقد اثار هذا السؤال باسكال من وجهة نظره كرياضي ، وبدأ اول تفكير منظم لحساب الاحتمالات .

وقد عرف باسكال نظرية الاحتمالات على النحو الآتي : « تتكون نظرية الاحتمالات من تحويل جميع الأحداث الى عدد معين مـن احداث متساوية الاحتمـال فى الحـدوث » ولنضرب مثلا على ذلك . مـا هو احتمـال الحصول على سبع نقط من رمية واحـدة لزوج من النرد ؟

هذا الحدث يحتوى فى مجال الاحتمـالات على عناصر عددها ستة وهي (٦،١)،(١،٦)، (٥،٢)،(٢،٥)،(٤،٣)،(٣،٤) وهذه العناصر الستة هي عناصر مجموعة جزئية من مجموعة لها ٣٦ عنصرا ، وهي تمثل ٣٦ رمية بزوج من النرد ، وذلك لأن عناصر المجموعة تتكون من (أ،ب) حيث أ،ب يأخذان القيم من ١ الى ٦ فقط ومعنى هذا ان احتمال الحصول على سبع نقط من زوج من النرد هو بنسبة ٦ : ٣٦ اى ١ : ٦ .

وتوجد بجانب الألعـاب التي تعتمـد على الصدفة البحتة العاب أخـرى كثيرة ، على اللاعب فيها أن يتخذ قرارا فى لحظة معينـة (وهذه القرارات قد تكون خاطئة او مصيبة) وتعد المواقف الاقتصاديـة والاجتماعيـة والسياسية وحتى أيضا مواقف النزاع الحربي ضمن مفهوم لعبة الاستراتيجية .

وقد ألف العالم الرياضي جون فون نويمان (John von Neumann) وزميله الاقتصادى أوسكار مورجنسترن (Oscar Morgenstern) كتابا عنوانه « نظرية الألعـاب والسـلوك الاقتصادى » وقد نجح فون نيومان فى اظهار الوصف الرياضي السليم للمفهوم العام للالعاب

وقد استخدم ڤون نيومان نظرية المجموعات كوسيلة لوصف التكوين للالعاب الاستراتيجية .

الفصل التاسع :

ان الصلة بين الرياضيات والفلسفة تبدو وثيقة فى موضوع الفراغ، ولقد لاقت النظريات الرياضية ، التي استخدمت اكثر من ثلاثة ابعاد ، نجاحا حقيقيا خصوصا فى مجال العلوم الطبيعية ، رغم أن ريمان (Riemann) الذى كان أول من بحث فى الفراغ ذى ن ـ بعدا كان يعتبر ان هذه النظرية لا فائدة منها بالنسبة للعلوم الطبيعية .

اذا أردنا أن نرسم اقصر مسافة بين مدينتين على سطح الكرة الأرضية ، فسيكون ذلك قوسا من دائرة عظمى على الكرة وليس خطا مستقيما فى مفهوم اقليدس. واذا رسمنا مثلثا على سطح الكرة ، فان مجموع الزوايا بين اضلاعه سيكون اكبر من قائمتين . ويمكن اعتبار هندسة ريمان امتداداً لهذه الهندسة الكروية فى ثلاثة ابعاد .

ومن الواضح أن من الممكن الاقتناع بالفراغ ذى ثلاثة ابعاد وربما بفراغ ذى اربعة ابعاد اذا اعتبرنا الزمن بعدا رابعا . ولكن كيف تتخيل فراغا ذا ن ـ بعدا . اذا بدأنا بالنقطة فاننا نعرف انه ليس للنقطة ابعاد أى أن لها صفراً ـ بعدا . واذا اخذنا نقطتين $أ_1$ ، $أ_2$ فيمكن رسم خط مستقيم وبذلك نحصل على الخط المستقيم ذى البعد الواحد . واذا اخذنا نقطة ثالثة $أ_3$ فاننا نحصل على مثلث وهو جزء من فراغ ذى بعدين ، وعندما نأخذ نقطة رابعة $أ_4$ نحصل على هرم ثلاثي ، وبذلك ننتقل الى فراغ ذى ثلاثة ابعاد . ويمكننا رسم الهرم الثلاثي على ورق اى اننا نستطيع تمثيل فراغ ذى ثلاثة ابعاد على فراغ ذى بعدين . ومعني هذا أنه باضافة نقطة نحصل دائما على فراغ ذى بعد اكبر فلماذا اذن نتوقف عند الفراغ ذى الثلاثة ابعاد . وفى الواقع يمكننا ان ننتقل الى فراغ ذى اربعة ابعاد باضافة نقطة خامسة ؟ وهكذا .

الفصل العاشر :

لقد أصبحت الرياضيات فى هذا العصر من الأدوات (tools) اللازمة لدراسة الفيزياء وبغيرها لا يمكن تتبع التقدم فى مجال أبحاث الفيزياء ، ومن الطبيعي انه ليس من المطلوب اتقان اساليب الرياضيات بالدرجة التي يتقنها بها الرياضيون . والواقع أن الفيزياء فى هذا العصر رياضية من أساسها .

وتعد الميكانيكا الكلاسيكية (classical mechanics) من النظريات الرائعة والبسيطة فى الفيزياء وترتبط بثلاثة أسماء لامعة هم جاليليو جاليلى « Galileo Galilei » واسحق نيوتن « Isaac Newton » وجوزيف لويس لاجرانج « Joseph Louis Lagrange » ويمكن اعتبار ميكانيكا نيوتن (Newtonian mechanics) كنوع مكبر من الهندسة الاقليدية فى حين أن الميكانيا التحليلية (Analytical mechanics) للاجرانج تستخدم اسلوبا مختلفا . والميكانيكا الكلاسيكية هي نظرية متكاملة وتعطى وصفا دقيقا للطبيعة اذا كان مفهومها متحققا ، ومن الخطأ التصور بانها لم تعد مناسبة للعصر الحالي ، اى عصر النظرية النسبية (Relatirity Theory) لأينشتين (Albert Einstein) فالنظرية النسبية هي امتداد لميكانيكا نيوتن .

ويعد حساب التفاضل والتكامل من اهم الوسائل لفهم المبادىء الأساسية فى الميكانيكا الكلاسيكية ، وبالنسبة للفيزيائيين فان المهارة فى استخدام حساب التفاضل والتكامل اهم من معرفة المفاهيم الدقيقة لهذا العلم .

وللدراسة حركة اى جسم فاننا نجد أن هناك نوعين من الحركة أولهما الحركة الانتقالية وثانيهما الحركة الدورانية .

والسرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة الى الزمن ، واذا كانت السرعة متغيرة فان العجلة هي معدل تغير السرعة بالنسبة الى الزمن .

واذا رسمنا منحنيا يمثل العلاقة بين السرعة والزمن ، فان المسافة المقطوعة فى فترة زمنية تساوى المساحة التي تقع بين المنحنى والمحور الذى يمثل عليه الزمن فى نفس الفترة الزمنية ، وبذلك فانه يساوى تكامل السرعة بالنسبة الى الزمن بين اللحظتين اللتين تحددان الفترة الزمنية .

ويعد نيوتن ولايبنتس من مؤسسي علم التفاضل والتكامل .

الفصل الحادى عشر

ان التقدم فى الآلات الحاسبة الحديثة (computers) قد تم بتعاون علماء الرياضيات والفيزياء والمهندسين ، وتوجد انواع مختلفة من الآلات الحاسبة ، والتي تسمى الآن الآلات الحاسبة الالكترونية . ومن اهم هذه الأنواع مايسمي بالحاسب الرقمى (Digital computer) ، ونوع آخر يسمى الحاسب التناظرى (Analogue computer) والنوع الأول يقوم على اساس حسابي ، ويستطيع القيام بالعمليات الحسابية بسرعة مذهلة تبلغ جزءا من مليون من الثانية لعملية واحدة .

والنوع الثاني يقوم اساس تمثيل الأرقام بكميات طبيعية مثل شدة تيار كهربي ، أوزاوية دوران قرص وهكذا ، والدقة فى العمليات الحسابية لا حدود لها . وتعتمد الأبحاث العملية الحديثة اعتمادا كبيرا على الآلات الحاسبة الالكترونية .

وتهتم الابحاث الاساسية فى الرياضيات بالمشكلات التي تخص الآلات الحاسبة ، ومن بين هذه المشاكل ماهي الحدود التي لايستطيع الحاسب أن يتجاوزها ؟

وهناك آلة تسمي آلة تيرنج Turing machine نسبة الى مخترعها (Alan M. Turing) وتعمل هذه الآلة وفقا لتعليمات متتابعة ، ويمكن وضع نظام قياسى لهذه التعليمات وترتيبها على جدول الآلة . وتؤدى هذه الآلة الحسابات على شريط مقسم الى عدد كبير من المربعات .

الفصل الثاني عشر

ليست هناك لغة عالمية مشتركة تحوى كل المعرفة ولايتكلم الرياضيون جميعا نفس اللغة ولكن لايمكن لأحد ان يميز بين رياضيات فرنسية أو المانية أو أمريكية أو غيرها ، وتسمح اللغة الرياضية دون صعوبة أو فقدان شيء بترجمة الدقيق الى اى لغة .

وقد ترددت من قبل كلمة أدوات (tools) عند تطبيق النظريات الرياضية فى المسائل ذات الصبغة التطبيقية . والواقع أن هناك تشابها كبيرا بين من يعملون فى حقل الرياضيات التطبيقية وصانعي الأدوات ، فكل منهم يستخدم الأداة المناسبة للعمل المطلوب . فمثلا حساب التفاضل والتكامل عند دراسة الميكانيكا ونظرية الزمر لمعالجة موضوعات الهندسة والفيزياء وهكذا .

واللغة التي يستخدمها الرياضيون ليست جامدة لاخيال فيها بحيث لا تترك لهم مجالا لابراز آرائهم ، كما أنهم لا يصنعون من نظمهم الصورية formal systems أدوات صالحة لمعالجة كل المسائل .

ولا توجد فلسفة اجبارية للرياضيات ، ولكن هناك رياضيون فلاسفة تتشابه افكارهم الى حد كبير ، وقد يتفقون فى بعض المشاكل وقد يختلفون فى البعض .

تعليق :

فى هذا الكتاب يحاول المؤلف مستعينا برسوم توضيحية ملونة ولغة عادية اقناع القراء أن الرياضيين ليسوا بأى حال من الاحوال اناسا ذوى خواص غريبة ، كما يبدو لأول وهلة وان فى استطاعة كل منّا أن يتابع أفكارهم . والواقع ان قراءة هذا الكتاب لاتجعل القارىء يخرج بانطباع بأن كل شىء فى الرياضيات سهل وبسيط ، ولكن يتولد لديه اقتناع بأن العمل فى حقل الرياضيات ، شأنه العمل فى أى علم آخر ، يحتاج الى مجهود .

والطريقة التي اتبعها المؤلف فى كتابه تدفع القارىء الى مواصلة القراءة ، نظرا للتسلسل الجميل ، والربط بين الموضوعات بعضها وبعض . وقد اعتني المؤلف باختيار الموضوعات واظهر مهارة فى شرحها حتى تبدو واضحة واستخدم امثلة طريفة لشرح الموضوعات .

وقد كان تركيز المؤلف على موضوعات الرياضيات المعاصرة وأهمها المنطق ، ونظرية المجموعات والزمر ، والهندسة اللااقليدية ، والآلات الحاسبة الالكترونية . ولكن هناك ملاحظة هامة وهي ان هذا الكتاب لم يستطع فى بعض الحالات التخلص مما فى بعض النظريات من صعوبة ، نظرا لطبيعة هذه النظريات ، ولذلك فان قراءة هذا الكتاب تكون مقبولة لأشخاص على قدر لابأس به من المعرفة بالرياضيات، وذلك رغم ان المؤلف ذكر أن مبدأه ليس الكتابة للرياضيين فقط ولكن للاشخاص العاديين ايضا .

★ ★ ★